Experto Universitario

UNIVERSITAT Carlemany

Descripción de las tareas

EJERCICIO 1

En las cuestiones siguientes se ha de señalar la letra C si son ciertas o la F si son falsas. **Es necesario justificar la respuesta.**

a) Considera el modelo de PL:

MIN $Z = 3X_1 + 2X_2$
Sujeto a:
$2X_1 - X_2 \leq 20$
$X_1 + X_2 \geq 30$
$2X_1 \leq 50$
$2X_1 + 3X_2 \leq 10$
$X_1, X_2 \geq 0$

En la primera iteración del algoritmo símplex entra en la base la variable X_1 y sale de la base la variable H_4 (variable de holgura de la cuarta restricción).

El problema se adecuará al modelo estándar de programación lineal, agregando las variables de holgura, exceso y/o artificiales en cada una de las restricciones:

Restricción 1: se agrega la variable de holgura H_1.
Restricción 2: se resta la variable de excedente E_2 y se suma la artificial A_2.
Restricción 3: se agrega la variable de holgura H_3.
Restricción 4: se agrega la variable de holgura H_4.

La tabla inicial es:

	Cj	3	2	0	0	0	0	M	
Cb	Base	X1	X2	H1	E2	A2	H3	H4	R
0	H1	2	-1	1	0	0	0	0	20
M	A2	1	1	0	-1	1	0	0	30
0	H3	2	0	0	0	0	1	0	50
0	H4	2	3	0	0	0	0	1	10
	Zj - Cj	M-3	M-2	0	-M	0	0	0	30M

La variable de entrada debe ser una variable no básica con el coeficiente $(Z_j - C_j)$ más positivo, en este caso (M-2), variable X2
La respuesta es **"Falso".**

b) Un PL tiene 3 variables de decisión no negativas, 4 restricciones y el vector "b" de términos independientes formado por valores positivos. De las 4 restricciones, 2 son del tipo "=", 1 del tipo ">=" y 1 del tipo "<=". Entonces, en su forma ampliada, el PL tendrá 11 variables.

Variables originales: El problema tiene 3 variables de decisión no negativas.

Variables de holgura: Como hay 1 restricción del tipo "<=", entonces necesitamos 1 variable de holgura.

Variables de excedente: Como hay 1 restricción del tipo ">=", entonces necesitamos 1 variable de excedente y 1 variable artificial.

Variables artificiales: Como hay 2 restricciones del tipo "=", entonces necesitamos 1 variable artificial por cada restricción.

Por lo tanto, en su forma ampliada, el problema tendrá 3 variables originales, 1 variables de holgura, 1 variable de exceso y 3 variables artificiales, lo que da un total de 8 variables en su forma ampliada.

La respuesta es **"Falso".**

c) Al aplicar el método simplex en un modelo de programación lineal de **mínimo** en una determinada iteración se ha obtenido la tabla siguiente:

			1	3				
			X_1	X_2	E_1	A_1	E_2	A_2
		10	0	1	1	-1	-1	1
		8	1	0	-3	3	1	-1

Podemos decir que pertenece a un modelo con solución múltiple.

El problema tiene soluciones múltiples cuando presenta valor $(Z_j - C_j) = 0$ en alguna variable secundaria. Según la tabla esto no ocurre para el problema analizado, por tanto, no tiene soluciones múltiples.

La respuesta es **"Falso".**

Con la ayuda de Solver hemos resuelto un PL. El informe de respuestas se muestra a continuación:

Celda objetivo (Máx)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$G$4	Función_objetivo	0	26750

Celdas de variables

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
$C$4	VAR_A	0	162,5	Continuar
$D$4	VAR_B	0	7,5	Continuar
$E$4	VAR_C	0	0	Continuar
$F$4	VAR_D	0	22,5	Continuar

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Demora
$G$5	Restricción.1	230	$G$5<=$I$5	No vinculante	270
$G$6	Restricción.2	207,5	$G$6<=$I$6	No vinculante	192,5
$G$7	Restricción.3	400	$G$7<=$I$7	Vinculante	0
$G$8	Restricción.4	400	$G$8<=$I$8	Vinculante	0
$G$9	Restricción.5	170	$G$9>=$I$9	Vinculante	0

d) A la vista de esta información, podemos asegurar que si aumentamos los tres últimos términos independientes (de los 5 del problema) en 1 unidad, aumentaremos el valor final de nuestra función objetivo.

Puesto que los precios sombra o **valor unitario** de los recursos representados en las restricciones 3, 4 y 5 es cero (restricciones vinculantes), significa que los cambios unitarios en el lado derecho de las respectivas restricciones sí afectan el valor óptimo de la solución.

La respuesta es **"Cierto".**

EJERCICIO 2

Un ganadero debe alimentar un rebaño con tres productos (A, B y C) teniendo en cuenta: que debe alimentar el rebaño con un mínimo de los nutrientes 1 y 2 presentes en cantidades distintas en los tres alimentos, teniendo en cuenta el precio de los productos:

Producto	Presencia nutriente 1 (unidad/unidad)	Presencia nutriente 2 (unidad/unidad)	Precio (euros/unidad)
A	16	4	500
B	4	8	250
C	10	16	600

Se sabe que para el periodo considerado:

- El rebaño necesita como mínimo 720 unidades del nutriente 1 y como mínimo 900 unidades del nutriente 2.
- Por razones sanitarias la suma de los productos A, B y C no puede superar las 120 unidades.

A partir de la información anterior, el modelo de programación lineal propuesto para determinar la compra que proporciona un coste mínimo es:

MIN $Z= 500\,A + 250\,B+ 600\,C$
sujeto a:
$16A+4B+10C \geq 720$
$4A+8B+16C \geq 900$
$A+B+C \leq 120$
$A, B, C \geq 0$

Se pide:

a) Formula el PL en su forma aumentada. Justifica si los puntos siguientes: P=(40,30,20), Q=(40,35,45), R=(40,40,30) son puntos factibles o si no lo son. Indica el valor que toman las holguras en cada uno de los factibles. Justifica si alguno de los tres puntos es un vértice de la región factible.

La forma aumentada del problema es:

$MIN\ Z = 500A + 250B + 600C + 0E_1 + MA_1 + 0E_2 + MA_2 + 0H_3$
sujeto a:
$16A + 4B + 10C - E_1 + A_1 = 720$
$4A + 8B + 16C - E_2 + A_2 = 900$
$A + B + C + H_3 = 120$
$A, B, C, E_1, A_1, E_2, A_2, H_3 \geq 0$

Evaluamos si los puntos P=(40,30,20), Q=(40,35,45) y R=(40,40,30) son factibles:

P=(40,30,20):
Sustituyendo los valores en las restricciones:

16(40) + 4(30) + 10(20) = 960 >= 720 (sí la cumple)
4(40) + 8(30) + 16(20) = 720 <=900 (no la cumple)
40 + 30 + 20 = 90<=120 (Sí la cumple)
No es factible

Q=(40,35,45):
Sustituyendo los valores en las restricciones:
16(40) + 4(35) + 10(45)=1230 >= 720 (sí la cumple)
4(40) + 8(35) + 16(45)=1160 >= 900 (sí la cumple)
40 + 35 + 45 = 120 <=120 (sí la cumple)
Sí es factible. Las holguras son E1=510; E2=260 y H3=0

R=(40,40,30):
Sustituyendo los valores en las restricciones:
16(40) + 4(40) + 10(30)=1100 >= 720 (sí la cumple)
4(40) + 8(40) + 16(30)=960 >=900 (sí la cumple)
40 + 40 + 30 = 110 <=120 (sí la cumple)
Sí es factible. Las holguras son E1=380; E2=60 y H3=10

Luego el punto P(40,30,20) no está en la región factible. Los puntos Q=(40,35,45) y R=(40,40,30) sí son factibles.

Ningún punto es vértice de la región factible puesto que ninguno de ellos satisface todas las restricciones de manera estricta.

b) Determina la tabla inicial del método símplex. Indica cuál es el valor de las variables de decisión, de las holguras y de Z en esta solución inicial. Justificapor qué la tabla obtenida no es una tabla óptima.

La tabla inicial del método simplex es:

	C_j	500	250	600	0	M	0	M	0	
C_b	Base	A	B	C	E1	A1	E2	A2	H3	R
M	A1	16	4	10	-1	1	0	0	0	720
M	A2	4	8	16	0	0	-1	1	0	900
0	H3	1	1	1	0	0	0	0	1	120
	Zj - Cj	20M-500	12M-250	26M-600	-M	0	-M	0	0	

En este caso, los valores de las variables de decisión en la tabla inicial son: $A = B = C = 0$.

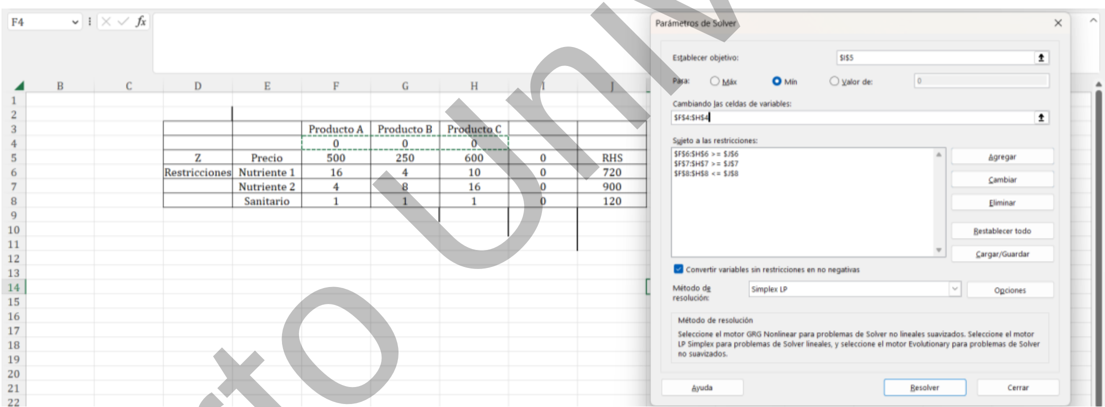
Los valores de las holguras son: $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $H_3 = 120$.

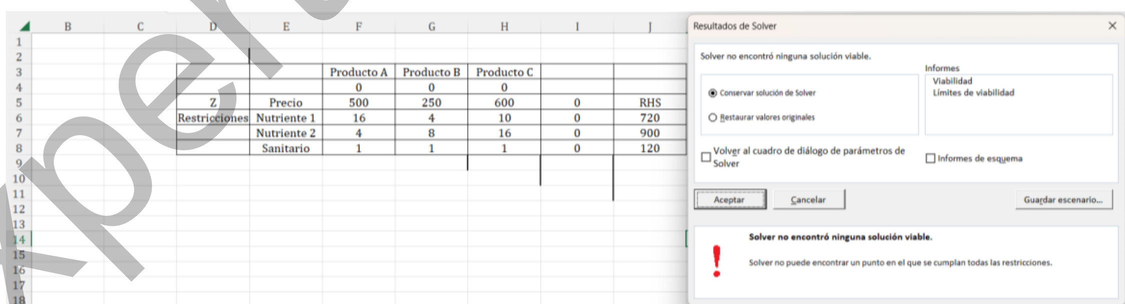
El costo según la tabla inicial es de: $Z = 1620M$

La tabla no es óptima, puesto que, los valores de $Z_j - C_j > 0$ para las variables $A, B\ y\ C$ y esto implica que el valor de la función objetivo se puede reducir.

c) Resuelve tu modelo con el complemento Solver de Excel y pega en tu documento de respuestas el "Informe de respuestas" obtenido; **no tienes que adjuntar el fichero Excel utilizado en la resolución.**

		Producto A	Producto B	Producto C		
		0	0	0		
Z	Precio	500	250	=$F$4*F5+$G$4*G5+$H$4*H5		
Restricciones	Nutriente 1	16	4	10	0	720
	Nutriente 2	4	8	16	0	900
	Sanitario	1	1	1	0	120





Se han seguido los pasos, estrictamente, según la guía y ha sido imposible conseguir la respuesta, adjunto las imágenes de pantalla. En este orden de ideas, para poder conseguir el análisis del problema, se ha procedido con una herramienta online de resolución de PL mediante método simplex tabular (https://www.plandemejora.com/calculadora-metodo-simplex-online/).

Tabla 4	C_j	500	250	600	0	0	0	M	M	
C_b	Base	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	R
500	X_1	1	0	0	-1/15	1/20	2/15	1/15	-1/20	19
600	X_3	0	0	1	-1/30	-1/10	-14/15	1/30	1/10	2
250	X_2	0	1	0	1/10	1/20	9/5	-1/10	-1/20	99
	Z	0	0	0	-85/3	-45/2	-130/3	-M+85/3	-M+45/2	35450

La solución óptima es Z = 35450

X_1= 19, X_2= 99, X_3= 2, S_1= 0, S_2= 0, S_3= 0, A_1= 0, A_2= 0

d) A partir de la respuesta anterior indica cuál es el valor de las variables de decisión, de las holguras y de la función objetivo (Z) en esta solución óptima. Interpreta los valores de las variables de holgura. Explica de qué tipo es la solución obtenida.

En este caso, los valores de las variables de decisión en la tabla final son: $A = 19$; $B = 99\ y\ C = 2$.

Los valores de las holguras son: $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $H_3 = 0$. Esto significa que las restricciones se cumplen de manera estricta, es decir, el rebaño recibirá estrictamente el mínimo de 720 unidades del nutriente 1, el mínimo de 900 unidades del nutriente 2 y se cumple estrictamente la exigencia sanitaria, produciendo exactamente 120 unidades conjuntas entre los productos A, B y C.

El costo mínimo en que se incurre con la programación de producción obtenida es de $Z = \$35450$.

EJERCICIO 3

Formula el modelo PL del problema siguiente. **Se tiene que formular en detalle su planteamiento matemático: variables de decisión, función objetivo y restricciones.** Luego dar la tabla inicial SIMPLEX y las iteraciones sucesivas hasta una tabla óptima y la interpretación de su respuesta (no de sus demás elementos).

Una empresa produce dos tipos de bebidas de cola: Normal y Light. Para su fabricación se utilizan horas de una planta embotelladora empleadas por unidad de bebida producida (5 para la normal y 10 para la light) y se disponen de 360 horas de funcionamiento de dicha planta. El Dpto. de Marketing exige que, al menos, el 50% de las unidades producidas de cola sea del tipo Normal. El beneficio unitario es de 6 euros para cada unidad de Normal y 9 para cada unidad de Light. Se pide, formula un modelo de PL que proporcione el plan de producción con un beneficio máximo. Se considera que se vende toda la producción.

La función objetivo está dada por el beneficio conjunto de la producción y venta de las bebidas:

Sea N: El número de bebidas tipo normal que se producen y venden.
Sea L: El número de bebidas tipo light que se producen y venden.

El beneficio por vender N unidades de bebidas tipo normal es: $6N$
El beneficio por vender L unidades de bebidas tipo light es: $9L$
El beneficio por vender, conjuntamente, N unidades de bebidas tipo normal y L unidades tipo light es:

$$Z = 6N + 9L$$

La disponibilidad de horas en la planta embotelladora genera una restricción:

$$5N + 10L \leq 360$$

La exigencia del Dpto. de Marketing genera una restricción:

$$0.5(N + L) \leq N \quad \Rightarrow \quad N + L \leq 2N \quad \Rightarrow \quad L - N \leq 0$$

El programa lineal para maximizar el beneficio será:

Maximizar: $Z = 6N + 9L$
Sujeto a:
$5N + 10L \leq 360$
$L - N \leq 0$
$L, N \geq 0$

La forma aumentada de este problema es:
Maximizar: $Z = 6N + 9L + 0H_1 + 0H_2$
Sujeto a:
$5N + 10L + H_1 \leq 360$
$L - N + H_2 \leq 0$
$L, N, H_1, H_2 \geq 0$

La tabla inicial es:

	Cj	6	9	0	0	
Cb	Base	N	L	H1	H2	R
0	H1	5	10	1	0	360
0	H2	1	-1	0	1	0
	Zj - Cj	-6	-9	0	0	

Segunda tabla (primera iteración)

	Cj	6	9	0	0	
Cb	Base	N	L	H1	H2	R
9	L	1/2	1	1/10	0	36
0	H2	3/2	0	1/10	1	36
	Zj - Cj	-3/2	0	9/2	0	324

Tercera tabla (segunda iteración)

	Cj	6	9	0	0	
Cb	Base	N	L	H1	H2	R
9	L	0	1	1/15	- 1/3	24
6	N	1	0	1/15	2/3	24
	Zj - Cj	0	0	1	1	360

Esta es la tabla óptima, ya no hay posibilidad de mejorarla.

La respuesta indica que se deben producir 24 unidades de bebida normal y 24 unidades de bebida light, para un beneficio total de 360 euros por la operación de producción y ventas.

Evaluación

Los tres ejercicios de esta actividad tienen el peso siguiente en la nota: Ejercicio1, 2 puntos; Ejercicio 2, 4,75 puntos (1.25+1.25+1+1.25); y Ejercicio 3, 3,25 puntos (1 modelo + 0,5 Tabla inicial + 1,25 iteraciones + 0,5 respuesta).

En la evaluación de vuestras respuestas, se valorará positivamente el quese incluyan valoraciones, reflexiones o conclusiones personales del resultado de las consultas y el estudio de los módulos. En relación a las cuestiones tipo test, recordad que es obligatorio justificar vuestra respuesta. Se valorará más esta justificación que el acierto en la veracidado falsedad de las mismas.

Fuentes de información

Recursos docentes:

- Apuntes asignatura, guía del módulo, miscelánea de ejercicios y manuales de Excel.